ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(OPTION T.A.)

***

CONCOURS D'ADMISSION 1987

⁂

MATHÉMATIQUES
1ère ÉPREUVE
OPTIONS M, P', T.A.

(Durée de l'épreuve 4 heures)

Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres réels ou complexes, on dit que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente si les deux séries $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_{-n}|$ convergent ; on pose alors :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n = u_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(u_n + u_{-n}\right).$$

I - ETUDE D'UNE FONCTION DEFINIE PAR UNE SERIE

Dans cette partie, on se propose d'étudier la fonction Θ définie sur $]0, +\infty[$ par la relation : $\Theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$

I - 1. Régularité et variations

a) Etablir la convergence absolue de la série précédente.

b) Montrer que Θ est continue sur $]0, +\infty[$.

c) Montrer que Θ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

d) Etudier la monotonie et la concavité de Θ.

I - 2. Etude asymptotique au voisinage de $+\infty$

Pour tout entier $k > 0$ et tout nombre réel $t > 0$, on pose : $R_k(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\pi n^2 t}$.

a) Prouver que : $0 \leq R_k(t) \leq \dfrac{e^{-\pi k^2 t}}{1 - e^{-2\pi k t}}$.

b) En déduire que Θ admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.

c) Etablir que, pour tout $t \geqslant 1$, $0 \leq \Theta(t) - [1 + 2e^{-\pi t}] \leq 10^{-5}$.

I - 3. Calcul d'une intégrale auxiliaire.

Etant donné $t \in]0, +\infty[$, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation : $f(x) = e^{-\pi t x^2}$.

Pour tout nombre réel u, on pose : (1) $\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2i\pi u x} dx$.

a) Etablir la convergence absolue de cette intégrale et calculer $\hat{f}(0)$. On admettra que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$.

b) Montrer que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. A cet effet, on pourra utiliser la suite des fonctions φ_p définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_p(u) = \int_{-p}^{+p} f(x) e^{-2i\pi u x} dx.$$

c) Prouver que $\hat{f}$ satisfait à l'équation différentielle : $y'(u) = -2\pi \dfrac{u}{t}\, y(u)$.

d) En déduire la valeur de $\hat{f}(u)$.

I - 4. Equation fonctionnelle

Pour tout nombre réel x, on pose : (2) $F(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x + p)$.

a) Etablir la convergence absolue de cette série et montrer que F est 1- périodique et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est développable en série de Fourier.

c) On écrit ce développement sous la forme :

(3) $$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi nx}.$$

Montrer que, pour tout entier n, $c_n = \hat{f}(n)$. En déduire la valeur de c_n.

d) Prouver finalement que, pour tout $t > 0$:

$$\Theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \Theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

I - 5. Application à l'étude de la fonction théta.

a) Déterminer la limite de $\Theta(t) - \frac{1}{\sqrt{t}}$ lorsque $t \longrightarrow 0+$ et établir un encadrement simple de Θ sur l'intervalle $]0, 1]$ à partir de celui obtenu dans I -2. c).

b) Calculer $\Theta'(1)$ en fonction de $\Theta(1)$ et déterminer des valeurs approchées de ces nombres à la précision 10^{-5}.

c) Construire la courbe représentative de la fonction Θ dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

II - ETUDE D'UNE FORMULE SOMMATOIRE

On se propose de généraliser les résultats obtenus au I - 4. au cas où f est une fonction à valeurs réelles ou complexes, de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, telle que les intégrales :

(*) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx \quad , \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,dx \quad , \int_{-\infty}^{+\infty} |f''(x)|\,dx$$

soient convergentes.

On pose encore :

(1) $$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2i\pi ux}\,dx$$

et (2) $$F(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x + p) \quad .$$

Enfin, pour toute fonction g à valeurs réelles ou complexes, continue sur $\mathbb{R}$, on pose :

$$N_\infty(g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| \text{ si g est bornée sur } \mathbb{R}$$

$$\text{et } N_1(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|\,dt \text{ si cette intégrale converge.}$$

- 3 -

II - 1. ETUDE DE LA FONCTION $\hat{f}$

a) Montrer que $\hat{f}$ est continue, bornée sur $\mathbb{R}$, et que $N_\infty(\hat{f}) \leq N_1(f)$.

b) Exprimer $(\widehat{f'})$ et $(\widehat{f''})$ en fonction de $\hat{f}$.

c) En déduire que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)$ est absolument convergente.

II - 2. ETUDE DE LA FONCTION F

a) Etablir que, pour tout nombre réel x et tout entier $p \in \mathbb{Z}$:

$$\left| f(x+p) - \int_{x+p}^{x+p+1} f(s)\,ds \right| \leq \int_{x+p}^{x+p+1} |f'(s)|\,ds$$

En déduire que, pour tout nombre réel x, la série $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p)$ est absolument convergente.

b) Prouver que F est 1- périodique, continue sur $\mathbb{R}$, et que :

$$N_\infty(F) \leq N_1(f) + N_1(f').$$

c) Etablir que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

II - 3. DEVELOPPEMENT DE F EN SERIE DE FOURIER

a) Montrer que, pour tout nombre réel x,

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2i\pi nx}. \tag{3}$$

En particulier, on a :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n). \tag{4}$$

b) Etendre la relation (3) au cas où f satisfait à l'hypothèse plus faible suivante : f est continue sur $\mathbb{R}$, ses restrictions à $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$ sont de classe C^2 et les trois intégrales (*) sont convergentes (on indiquera de façon précise comment s'étendent à ce cas plus général les résultats établis dans les questions II - 1. et II - 2).

II - 4. APPLICATION

On prend $f(x) = e^{-2\pi a|x|}$ où $a > 0$.

a) Expliciter la relation (3) ; en déduire, pour $x \in [0, 1[$, la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2 + a^2}.$$

b) Calculer enfin, pour $x \in [0, 1[$, la somme de la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{n^2}.$$

***